Kurvendisskusion mit MuPad

Definieren der gegebenen Funktion:

```
assume(Type::Real)
```

$\mathbb{R}$

```
f:=x->1/4*(1+x^2)*(5-x^2)
```

$$x \rightarrow \frac{\left(1+x^2\right)\cdot\left(5-x^2\right)}{4}$$

```
expand(f(x))
```

$$-\frac{x^4}{4}+x^2+\frac{5}{4}$$

Kurvendiskussion:

1. Definitionsbereich:
Keine Einschränkung, daher alle reelen Zahlen: IR .

- - - - - - - - - - - - - - -

2. Wertebereich:
Da der Grad der ganzrationalen Funktion gerade ist und der Vorfaktor negativ, werden hauptsächlich negative reele Zahlen als Funktionswerte angenommen (Siehe Abschnitt 6. "Betragsgroßen Argumente") .

- - - - - - - - - - - - - - -

3. Ableitungen:

Erste Ableitung

```
f'(x);
expand(f'(x))
```

$$-\frac{x\cdot\left(x^2+1\right)}{2}-\frac{x\cdot\left(x^2-5\right)}{2}$$

$$2\cdot x-x^3$$

Zweite Ableitung

```
f''(x);
```

$$2-3\cdot x^2$$

Dritte Ableitung

```
f'''(x)
```

$$-6\cdot x$$

\- - - - - - - - - - - - - - -

4. Symmetrie des Graphen:

```
bool(f(x)=f(-x))
```

TRUE

=> Achsensymmetrisch zur y-Achse

Zur Probe:

```
bool(f(x)=-f(-x))
```

FALSE

=>nicht Punktsymmetrisch zum Ursprung

Daher liegt eine Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

\- - - - - - - - - - - - - - -

5. Nullstellen:

```
solve(f(x)=0,x)
```

$$\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

NST sind x-1= - √5 und x_2= √5 .

\- - - - - - - - - - - - - - -

6. Verhalten für IxI -> ∞ :

```
limit(f(x),x=+infinity)
```

$$-\infty$$

```
limit(f(x),x=-infinity)
```

$-\infty$

----

7. Extrempunkte:

Notwendige Bedingung für Extrema

```
solve(f'(x)=0,x)
```

$\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

mögliche Extrema bei xe_1= 0 und xe_2= -√2 und xe_3= √2.

Hinreichende Bedingung für Extrema

```
f''(0);
f''(-sqrt(2));
f''(sqrt(2));
```

2

-4

-4

=> an xe_2= -√2 und xe_3= √2 liegt ein Hochpunkt,
da f''(-√2)<0 und f''(√2)<0 .

=>an xe_2= 0 liegt ein Tiefpunkt, da f''(0)>0 .

y-Koordinaten der Extrema

```
f(0);
f(-sqrt(2));
f(sqrt(2))
```

$\frac{5}{4}$

$\frac{9}{4}$

$\frac{9}{4}$

$$\frac{9}{4}$$

HPe liegen bei (-√2 | 9/4) bzw. (√2 | 9/4) ,
TP liegt bei (0 | 5/4).
- - - - - - - - - - - - - - -

8. Wendepunkte:

Notwendige Bedingung für Wendestellen

```
Loes:=solve(f''(x)=0,x);
float(%)
```

$$\left\{-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}$$

$$\{-0.8164965809, 0.8164965809\}$$

=> mögliche Wendestellen bei xw_1= ca. -0,816 bzw. xw_2= ca. 0,816.

```
xw_1:=Loes[1];
xw_2:=Loes[2];
```

$$-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen
`xw_1:`

```
f''(xw_1-0.1);
float(f''(xw_1-0.1));
f''(xw_1+0.1);
float(f''(xw_1+0.1)); // VZW-Kriterium
f'''(xw_1);           // 3. Ableitung
float(f'''(xw_1));
```

$$2-3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}+0.1\right)^2$$

$$-0.5198979486$$

-0.5198979486

$$2-3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}-0.1\right)^2$$

0.4598979486

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

4.898979486

=> Rechts-Links-Wendestelle bei xw_1≈ - 0,816, da
* f'''(0)>0 bzw.
* wg. des VZW von negativ zu positiv der zweiten Ableitung.

- -

```
xw_2:
```

```
f''(xw_2-0.1);
float(f''(xw_2-0.1));
f''(xw_2+0.1);
float(f''(xw_2+0.1)); // VZW-Kriterium
f'''(xw_2);           // 3. Ableitung
float(f'''(xw_2));
```

$$2-3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}-0.1\right)^2$$

0.4598979486

$$2-3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}+0.1\right)^2$$

-0.5198979486

$$-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

-4.898979486

=> Links-Rechts-Wendestelle bei xw_2≈ + 0,816, da
* f'''(0)<0 bzw.
* wg. des VZW von positiv zu negativ in der zweiten Ableitung.

y-Koordinaten der Wendestelle

```
xw_1:
float(xw_1);
f(xw_1);
float(f(xw_1))
```

-0.8164965809

$\frac{65}{36}$

1.805555556

```
xw_2:
float(xw_2);
f(xw_2);
float(f(xw_2))
```

0.8164965809

$\frac{65}{36}$

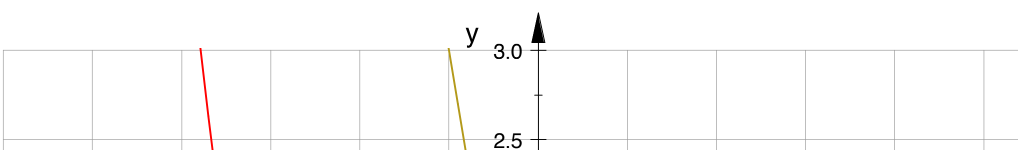
1.805555556

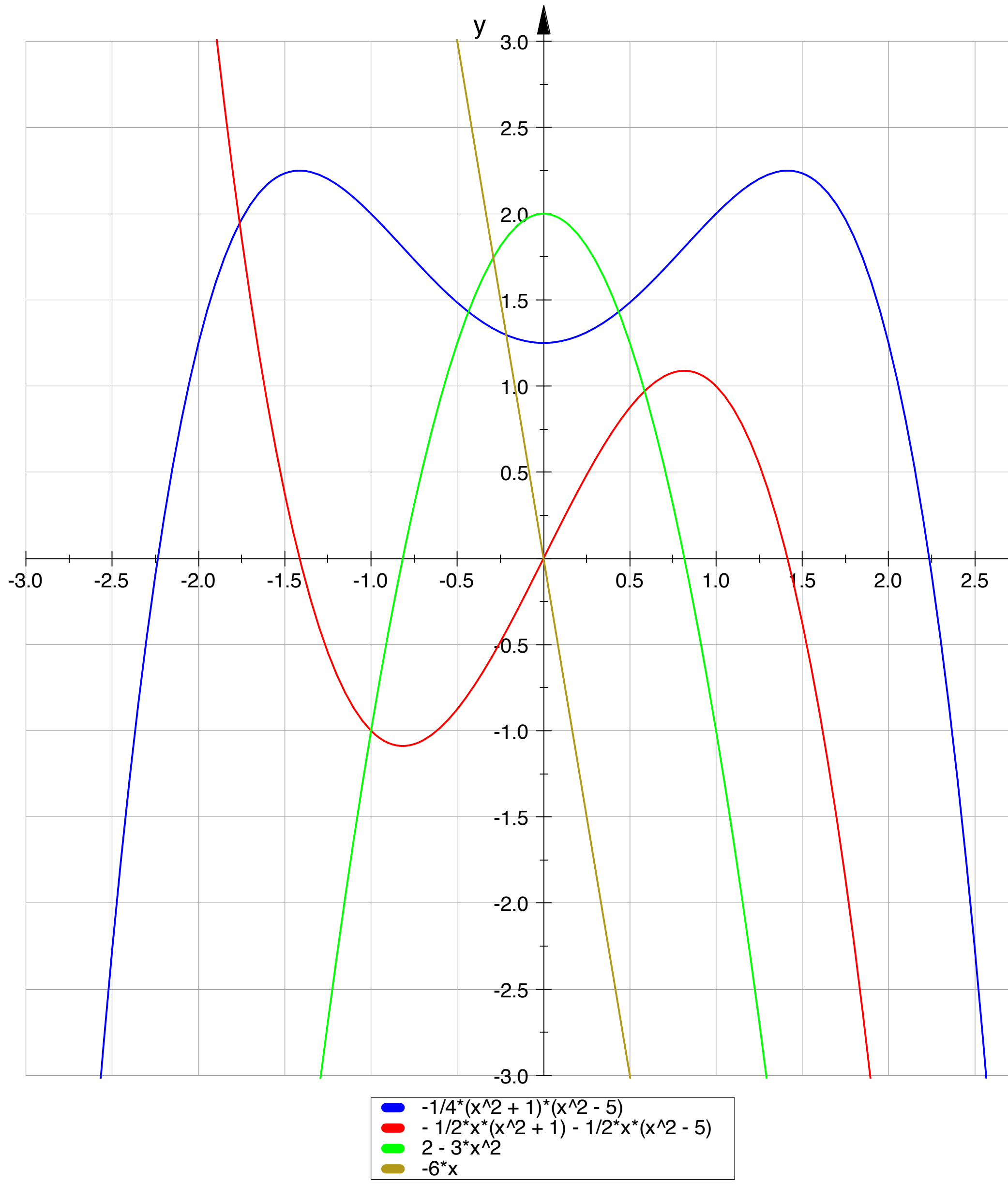
Die Wendepunkt e liegen bei
WP1(≈ - 0,816 I ≈ 1,81) bzw. WP2(≈ 0,816 I ≈ 1,81) .
- - - - - - - - - - - - - - -

9. Graph:

Blau = Ausgangsfunktion
Rot = Funktion der ersten Ableitung
Grün = Funktion der zweiten Ableitung
Ocker = Funktion der dritten Ableitung

```
plotfunc2d(f(x),f'(x), f''(x), f'''(x),x=-3..3, YRange=-3..3, S
```


y
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-3.0
-2.5
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
-1/4*(x^2 + 1)*(x^2 - 5)
- 1/2*x*(x^2 + 1) - 1/2*x*(x^2 - 5)
2 - 3*x^2
-6*x